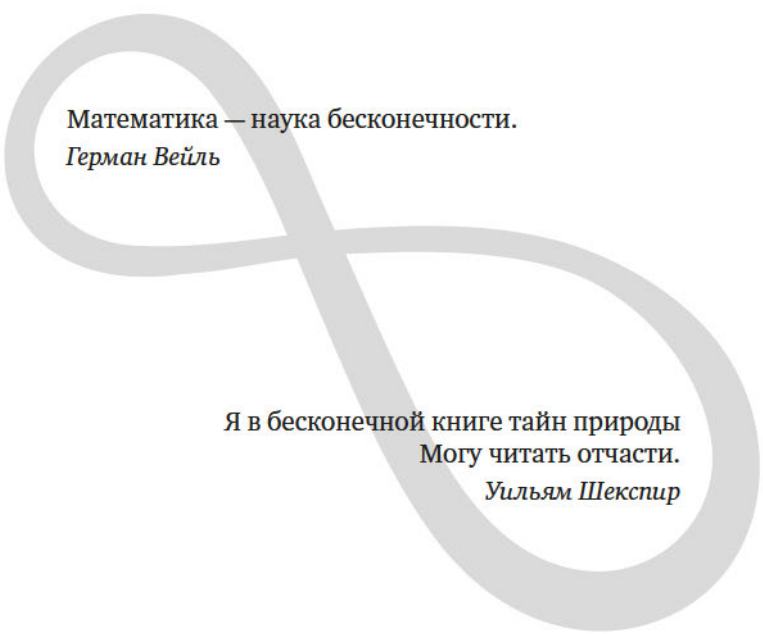




Математика — наука бесконечности.

Герман Вейль

Я в бесконечной книге тайн природы
Могу читать отчасти.

Уильям Шекспир

ХАИМ ШАПИРА

УДИВИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

КАК ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ
И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ
ПОРОЖДАЮТ
ПАРАДОКСЫ
БЕСКОНЕЧНОСТИ



УДК 510.22+511
ББК 22.12+22.13

Ш23

Haim Shapira

EIGHT LESSONS ON INFINITY

A Mathematical Adventure

Перевод с английского *Дмитрия Прокофьева*

Текст печатается по изданию:

Шапира Х. Восемь этюдов о бесконечности: Математическое приключение. М.: КоЛибри, Азбука-Аттикус, 2021.

Шапира Х.

Ш23 Удивительная математика : Как теория чисел и теория множеств порождают парадоксы бесконечности / Хаим Шапира ; [пер. с англ. Д.А. Прокофьева]. — М. : КоЛибри, Азбука-Аттикус, 2024. — 336 с.: ил.

ISBN 978-5-389-26822-7

У книги о бесконечности не может быть конца; бесконечность — это нескончаемая история, утверждает автор нескольких международных бестселлеров, блестящий математик и философ, профессор Тель-Авивского университета Хаим Шапира. В сопровождении величайших математических умов всех эпох с их гениальными гипотезами, теоремами и доказательствами вы отправитесь в увлекательное математическое путешествие, в ходе которого вас ждет множество открытий, чудесная дружба с цифрами и великолепная пища для ума.

«Почему столь многие люди чураются замысловатости и красоты, которые можно найти в мире чисел и их связях друг с другом? Возможно, главная причина заключается в неприступности математики и тех трудностях, с которыми сталкиваются желающие познать ее. Действительно, математика весьма сложна, и, чтобы разобраться в ее хитросплетениях, необходимо затратить время и приложить умственные усилия — но и за особо изысканными жемчужинами иногда приходится нырять до самых недоступных глубин. Для меня важно, чтобы эту книгу мог с удовольствием читать любой человек, достаточно любознательный и стремящийся время от времени поработать головой». (*Хаим Шапира*)

ISBN 978-5-389-26822-7

© Haim Shapira, 2019

© Прокофьев Д. А., перевод на русский язык, 2021

© Издание на русском языке, оформление.

ООО «Издательская группа «Азбука-Аттикус», 2024
КоЛибри®

ПРЕДИСЛОВИЕ

Если бы мне пришлось начать вновь свое обучение, то я последовал бы совету Платона и принялся бы сперва за математику.*

Галилео Галилей

Английский биолог и популяризатор науки Ричард Докинз заметил однажды, что никто и никогда не признается с гордостью в невежестве и необразованности по части литературы, но неосведомленность в точных науках, ярче всего воплощающаяся в абсолютном незнании математики, вовсе не считается чем-то постыдным. Докинз заметил это обстоятельство не первым: он и сам указывает, что это утверждение давно превратилось в клише.

Это, разумеется, истинная правда. Никто не станет хвалиться, что никогда не читал книг, не видел ни одного произведения искусства, никогда — ни разу в жизни — не был растроган музыкой. Если провести опрос, я совершенно уверен, что не най-

* «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки». День первый. (Пер. С. Н. Долгова.) Здесь и далее цит. по: Галилей Г. Избранные произведения: В 2 т. М.: Наука, 1964. Т. 2.

дется ни одного образованного взрослого человека, никогда не слышавшего о Шекспире, Рембрандте или Бахе. По всей вероятности, участники такого опроса знали бы и имена великих математиков Пифагора, Исаака Ньютона и Альберта Эйнштейна. Но многие ли слышали о Леонарде Эйлере, Сринивасе Рамануджане или Георге Канторе?

Возможно, в этот самый момент вы тоже спрашиваете себя: «Что? Кто это такие? Их имена ни о чем мне не говорят».

Это великие математики. Величайшие математики!

Я всерьез увлекаюсь музыкой, литературой и изобразительным искусством, но искренне считаю, что математические формулы Рамануджана — такое же чудо, как музыкальные построения Баха, а открытия Кантора, касающиеся бесконечности, кажутся мне не менее поразительными, чем произведения Шекспира.

И раз уж мы сравниваем гениев художественного творчества с гениями математики, я хотел бы отметить, что Кантор был специалистом по творчеству Шекспира, а Эйнштейн — прекрасным пианистом и скрипачом. Такое встречается очень часто, и я знаю много математиков, чрезвычайно хорошо знающих литературу, искусство и музыку.

Более того, немецкий математик Карл Вейерштрасс сказал как-то, что математик, в котором

нет ничего от поэта, не может быть хорошим математиком. Однако создается впечатление, что этот принцип не действует в обратном направлении: многие из тех, кто работает в области литературы, музыки или изобразительного искусства, по-видимому, испытывают неприязнь к математике.

В чем тут дело? Почему столь многие люди, какими бы образованными они ни были, чураются замысловатости и красоты, которые можно найти в мире чисел и их связях друг с другом?

Возможно, главная причина заключается в неприступности математики и тех трудностях, с которыми сталкиваются желающие познать ее. Действительно, математика весьма сложна, и, чтобы разобраться в ее хитросплетениях, необходимо затратить время и приложить умственные усилия — но и за особо изысканными жемчужинами иногда приходится нырять до самых недоступных глубин.

Мысль написать эту книгу явилась мне однажды, когда я перебирал свою математическую библиотеку. Я заметил, что мои сочинения по большей части относятся к одной из двух категорий:

1. Математические книги, написанные для неспециалистов. Некоторые из них совершенно замечательны, но они в большей степени посвящены рассказам о математике, чем самой математике.

2. Математические книги, написанные для математиков. В этой категории тоже есть множество превосходных работ, но прочесть (и понять) их могут только математики.

Поэтому я решил написать книгу, которая относилась бы еще к одной, третьей категории. Я расскажу читателю-неспециалисту просто и ясно о двух математических теориях, которые считаю самыми завораживающими, — теории чисел и теории множеств, и каждая из них имеет отношение к бесконечности. Вместе с этим я предложу стратегии математического мышления, позволяющие читателю испытать свои способности к решению поистине увлекательных математических задач.

Для меня важно, чтобы эту книгу мог с удовольствием читать любой человек, достаточно любознательный и стремящийся время от времени поработать головой. Поэтому я воздержался от использования любых устрашающих математических символов (нигде в этой книге вы не найдете никаких $\nabla f(x_1, \dots, x_n)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\iiint$ или $\lim_{x \rightarrow \infty}$). Применяются только базовые математические операции (сложение, вычитание, умножение и деление, плюс несколько операций посложнее, вроде возведения в степень и извлечения корня). Кроме того, я как мог старался сделать текст занимательным: на самом деле никто не любит задач о трех трубах,

которые наполняют бассейн, и еще двух, которые (по никому не известным причинам) одновременно с этим пытаются его осушить.

Комментарии к книге, ответы на вопросы и вопросы о вопросах можно присылать по адресу shapirapiano@gmail.com. Желаю вам увлекательного путешествия!

Разминка

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ В РАЗМЫШЛЕНИЯ

Размышления: разговор души с самой собой.

Платон

Если вы не поленились и прочитали предисловие, вы уже знаете, что у меня есть довольно солидная коллекция книг по математике. Одно из моих любимых занятий — возиться с интересными задачами. Ну, для *меня-то* это естественно. Я этому и учился. Но чтобы увидеть красоту и изящество математики, необязательно заканчивать математический факультет. Если вам хватает терпения немного подумать, вы найдете тысячи интересных — и иногда весьма знаменитых — математических задач и парадоксов, которыми уже много веков восхищается стар и млад. Стоит приложить немного усилий, и почти кто угодно сможет испытать тот восторг, в который приводит способность решать головоломки, кажущиеся на первый взгляд чрезвычайно сложными.

В этом разделе я представлю скромный набор математических задач из числа моих любимых,

от довольно простых до весьма глубоких и даже предположительно неразрешимых (а если вы их все-таки решите, вас ждет премия). Я хочу познакомить вас, мой уважаемый читатель, хотя бы с немногими образцами интереснейших размышлений, которые вы можете найти в поразительном мире математики.

Великое маленькое исследование — открытая проблема

Много лет назад я прочитал удостоенную Пулитцеровской премии книгу Дугласа Р. Хофштадтера «Гёдель, Эшер, Бах». Сам автор называет ее «метафорической фугой о разумах и машинах в духе Льюиса Кэрролла». Она рассказывает о самых разнообразных предметах из царств математики, музыки, симметрии, искусственного интеллекта и логики и содержит множество математических загадок. Я хотел бы познакомить вас с одной из них.

Возьмем любое число — точнее, любое целое или натуральное число. Ахилл (он же Ахиллес — тот самый, у которого были проблемы с пяткой), также ставший одним из персонажей книги Хофштадтера, задумал число 15. Вы, разумеется, можете выбрать любое число по своему вкусу.

Теперь сделаем вот что: если это число четное, разделим его на 2. Если оно нечетное, умножим

его на 3 и прибавим 1. Будем повторять эту процедуру снова и снова, пока не получим (если получим) число 1. Посмотрим, как это работает:

Поскольку 15 — число нечетное, умножим его на 3 и прибавим 1.

$$15 \times 3 + 1 \text{ дает } 46.$$

46 — число четное: разделим его на 2 и получим 23. Поскольку это число нечетное, умножим его на 3 и прибавим 1.

$$23 \times 3 + 1 = 70$$

Продолжим этот процесс:

$$70/2 = 35;$$

$$35 \times 3 + 1 = 106;$$

$$106/2 = 53;$$

$$53 \times 3 + 1 = 160;$$

$$160/2 = 80;$$

$$80/2 = 40;$$

$$40/2 = 20;$$

$$20/2 = 10;$$

$$10/2 = 5;$$

$$5 \times 3 + 1 = 16;$$

$$16/2 = 8;$$

$$8/2 = 4;$$

$$4/2 = 2, \text{ и наконец } 2/2 = 1.$$

Процесс дошел до конца.

Спрашивается, правда ли, что эта процедура рано или поздно приводит к 1 для *любого* исходного числа?

Попробуйте подставить в нее пару других чисел. Для некоторых из них этот процесс может оказаться чрезвычайно долгим, и вам, возможно, понадобится очень большой лист бумаги. Если вы попытаетесь запустить этот процесс на компьютере, имейте в виду — вычисления могут затянуться.

Хофштадтер предложил Ахиллесу попробовать число 27. Вы можете последовать его примеру. Я дам вам пару минут... или, может быть, часов.

Сдаетесь? Если начать с 27, кажется, что процесс все продолжается и продолжается и дает нескончаемую цепочку вычислений. В какой-то момент вы можете решить, что она и впрямь никогда не закончится. На самом деле требуемое в этом случае число шагов равно 111.

В своей книге Хофштадтер предостерегает Ахиллеса относительно попыток найти ответ на заданный выше вопрос (действительно ли из любого числа можно получить 1?) и рассказывает, что эта задача известна под названием «гипотеза Коллатца» (напомню на всякий случай, что «гипотеза» значит «догадка» или, точнее, «предложение возможной новой теоремы, которую еще нужно доказать»). Она утверждает, что, с какого бы числа мы ни начали описанный выше процесс, он рано или поздно приведет к 1. Эта гипотеза названа в честь немецкого математика Лотара Коллатца (1910–1990), впервые

описавшего ее в 1937 г. Тем не менее у нее есть и другие названия: в частности, ее называют гипотезой Улама (по имени польского математика Станислава Улама) или задачей Какутани (по имени японского математика Сидзуо Какутани). Иногда говорят просто о гипотезе $3n + 1$, что вполне логично.

Когда я впервые узнал о гипотезе $3n + 1$, я был слишком молод, чтобы осознать, насколько сложна и глубока эта задача. Я предполагал, что мне понадобится всего несколько дней, чтобы придумать критерий, определяющий, для каких чисел эта процедура дает на последнем шаге 1. Мне казалось даже, что я сумею доказать истинность гипотезы — что любое число в конце концов приводит к 1. Возможно, занимаясь этим, я даже смогу открыть распределение числа шагов, необходимого для каждого конкретного числа (например, когда мы подставили число 15, количество шагов оказалось равным 17). Я не мог понять только одного: как так получилось, что никто до сих пор не сумел решить эту задачу.

Во всяком случае, так я думал...

По-видимому, существует веская причина, по которой эта задача все еще считается «открытой проблемой».

Хотя успеха я не добился, это меня не слишком расстроило. Я нахожу трудные вопросы очень привлекательными. Они заставляют размышлять.

На самом деле я даже больше люблю задачи, которые не могу решить (или по меньшей мере не могу решить без труда), чем те, которые решаются в момент и без особых интеллектуальных усилий. Разумеется, это не значит, что я оказываюсь на вершине блаженства, когда не могу справиться с какой-нибудь проблемой — несомненно, решение непростой задачи, доставшееся ценой большого труда, доставляет гораздо больше удовольствия.

Вернемся, однако, к нашей гипотезе. Посмотрите, что тут происходит. Мы столкнулись с математической задачей, в которой используются только базовые арифметические операции — сложение, умножение и деление, — и тем не менее *никто на свете не знает, как ее решить!*

Как такое может быть? Можно было бы предположить, что задача, которую можно сформулировать таким простым образом, должна иметь простое решение. Не тут-то было! На простой вопрос не всегда есть простой ответ. В математике есть множество вопросов, которые можно задать маленькому ребенку, и он легко поймет, в чем состоит задача, но ответов на них до сих пор не нашли даже самые гениальные взрослые.

Если рассмотреть достаточное количество примеров задачи Коллатца, можно заметить одно обстоятельство: последние числа, появляющиеся

в этом процессе, представляют собой последовательно уменьшающиеся степени 2. Например, если начать с 15, то последние пять чисел последовательности — это 16, 8, 4, 2 и, наконец, 1.

Это явление можно сформулировать в виде правила, сказав, что если процесс доходит до числа вида 2^n , то он гарантированно сойдется к 1 в точности через n делений на 2. Это наблюдение позволяет перефразировать гипотезу $3n + 1$ следующим образом: приходит ли на каком-то этапе процесс, начатый с любого произвольного числа, к степени 2?

Принцип замены исходной задачи на другую называется приведением или упрощением. Этот метод — полезный математический инструмент; в некотором смысле он открывает более естественный путь к решению математических задач. Еще одна, похожая, стратегия решения задач — это рассуждения в обратном порядке (от конца к началу). Этот прием, возможно, знаком вам по лабиринтам. Когда разрабатываешь маршрут по лабиринту, иногда бывает удобнее начать от выхода и прокладывать путь к исходной точке. В некотором глубоком смысле можно сказать, что в том же состоит и метод приведения математической задачи.

Венгерский математик Пал Эрдёш (1913–1996) любил предлагать денежные призы за успешное

решение интересовавших его открытых математических проблем. Призы эти начинались с 25 долларов, а доказательство гипотезы Коллатца стоило в его прејскуранте целых 500 долларов — то еѣ попадало в категорию весьма дорогих задач, хотя сам Эрдѣш говорил, что мир математики, возможно, не готов к таким сложным и запутанным задачам, как гипотеза $3n + 1$. Эрдѣша уже нет с нами, но можно не беспокоиться: выплату призов взял на себя его коллега Рон Грэм. Если вам удастся решить эту задачу, вы можете получить приз одним из двух способов: либо в виде чека, который сам Эрдѣш выписал перед смертью (его можно только вставить в рамку: срок действия этого чека давно истек), либо реальными деньгами (выбор между грехом гордыни и грехом сребролюбия).

К слову, а также потому, что я хотел бы поделиться этим интересным фактом, самое большое число, когда-либо использованное в математическом доказательстве, названо в честь этого же самого Рона Грэма. Число это настолько велико, что его невозможно записать в стандартной математической нотации.

Мудрость — это знать, что не знаешь того, чего не знаешь, и знаешь то, что знаешь. Глупость — это думать, что знаешь то, чего не знаешь, или не знаешь того, что знаешь.

Китайская пословица

ЧИСЛО ЭРДЁША

Пал Эрдёш был математиком исключительно плодовитым. Его превосходную биографию можно найти в книге Пола Хофмана «Человек, который любил только числа» (The Man Who Loved Only Numbers, 1998). Он написал более 1400 научных статей. Эрдёш был страстным поборником командной работы и сотрудничества, и за годы его научной деятельности вместе с ним над его статьями работали целых 511 математиков. Любому математику, который когда-либо писал статью в соавторстве с самим Эрдешем, присваивается престижное число Эрдёша, равное 1. Те, кто сотрудничал с его соавторами, но не с самим Эрдешем, получают число Эрдёша, равное 2. Аналогичным образом по мере все большего удаления присваиваются числа Эрдёша, равные 3, 4 и так далее. Общее правило таково: если вы сотрудничаете с человеком, наименьшее число Эрдёша которого равно k , то ваше число Эрдёша равно $k + 1$. Сам Эрдёш был единственным человеком с числом Эрдёша, равным 0. На противоположном конце спектра находятся те, кто никогда не писал статей с Эрдешем и никогда не писал статей ни с кем из имеющих конечное число Эрдёша: их число Эрдёша равно бесконечности (∞). «Бесконечное число Эрдёша» звучит весьма престижно — может быть, даже престижнее, чем, скажем, «число Эрдёша 7», — но многие из вас, наверное, удивятся, узнав, что ваше собственное число Эрдёша (как и у большей части человечества) как раз и равно

бесконечности. Я сам не пишу статей, но однажды принимал участие в совместной работе над статьей с математиком, число Эрдёша которого равнялось 3, так что я, даже не стремясь к тому, стал гордым обладателем числа Эрдёша, равного 4.

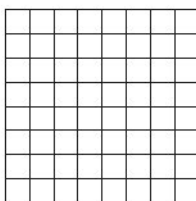
Это напоминает популярную салонную игру «Шесть шагов до Кевина Бейкона». Знаменитый голливудский актер Кевин Бейкон заявил однажды, что все до единого актеры в Голливуде либо снимались с ним вместе (Бейкон-1), либо снимались с кем-нибудь, с кем снимался и он (Бейкон-2), либо с кем-нибудь, кто снимался с кем-нибудь, кто... (Бейкон-3, 4 и т. д.). В целом, утверждал он, «число Бейкона» почти всех актеров и актрис Голливуда не превышает 6. Например, у Элвиса Пресли оно равно 2. Связь между ними вы можете восстановить самостоятельно¹. Кажется, что мир действительно тесен: в нем есть люди, у которых есть и число Эрдёша, и число Бейкона. Например, у Рона Грэма число Эрдёша равно 1, а число Бейкона — 2. А у знаменитой израильской актрисы Натали Портман число Эрдёша равно 5, а число Бейкона — 1 (этого вы не ожидали, правда?).

Вернемся наконец к доказательству гипотезы Коллатца. Его не существует, и, по правде говоря, я знаю множество способов заработать 500 долларов, гораздо более простых, чем возня с этой задачей.

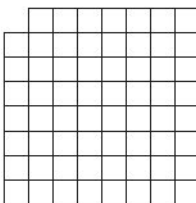
Загадка шахматной доски

Я несколько сомневался, говорить ли о следующей загадке. На самом деле она очень проста. Тем не менее после бурного спора с самим собой я решил все-таки рассказать о ней, потому что она весьма знаменита, причем и сама загадка, и ее решение замечательно красивы.

Рассмотрим сетку размером 8×8 ячеек.



Очевидно, всю эту сетку легко покрыть 32 костяшками домино размером 1×2 ячейки. А теперь уберем две клетки, расположенные в противоположных углах.



Можно ли покрыть получившуюся сетку всего 31 костяшкой?

Мои друзья (все они не математики, но по большей части люди весьма умные) в большин-

Научно-популярное издание
Танымал ғылыми басылым

ШАПИРА ХАИМ

УДИВИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Как теория чисел и теория множеств
порождают парадоксы бесконечности

Редактор Н. Галактионова
Научный редактор М. Капустин
Художественный редактор М. Левыкин
Технический редактор Л. Сеницына
Корректоры Т. Филиппова, Н. Соколова
Компьютерная верстка Т. Коровенковой

Подписано в печать / Баспаға қол қойылды 01.02.2024.
Формат 84 × 100 1/32. Гарнитура «Charter». Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 16,38.
Тираж 3000 экз. G-SCI-35819-01-R. Заказ №

Изготовитель:
ООО «Издательская Группа
«Азбука-Аттикус» — обладатель
товарного знака Колибри
115093, Москва, вн. тер. г.
муниципальный округ Даниловский,
пер. Партийный, д. 1, к. 25
Тел. (495) 933-76-01,
факс (495) 933-76-19
E-mail: sales@atticus-group.ru

Филиал ООО «Издательская Группа
«Азбука-Аттикус»
в г. Санкт-Петербурге
191024, г. Санкт-Петербург,
ул. Херсонская, д. 12–14, лит. А
Тел. (812) 327-04-55
E-mail: trade@azbooka.spb.ru
www.azbooka.ru; www.atticus-group.ru

Отпечатано в России.

Өндіруші:
«Издательская Группа
«Азбука-Аттикус» ЖШҚ — Колибри
тауар белгісінің иесі
115093, Мәскеу, қ. іш. аум.
Даниловский муниципалдық округі,
Партийный т.ш., 1-үй, к. 25
Тел. (495) 933-76-01,
факс (495) 933-76-19
Эл. поштасы: sales@atticus-group.ru

Санкт-Петербург қаласындағы
«Азбука-Аттикус» Баспа Тобы»
ЖШҚ филиалы,
191024, Санкт-Петербург,
Херсон көшесі, 12–14-үй, лит. А
Тел. (812) 327-04-55
Эл. поштасы: trade@azbooka.spb.ru
www.azbooka.ru; www.atticus-group.ru

Ресейде басып шығарылған.

Техникалық реттеу туралы РФ заңнамасына сай басылымның сәйкестігін
растау туралы мәліметтерді мына адрес бойынша алуға болады:
<http://atticus-group.ru/certification/>.

Знак информационной продукции (Федеральный закон № 436-ФЗ от 29.12.2010 г.)

Ақпараттық өнім белгісі (29.12.2010 ж. № 436-ФЗ федералдық заң)

